Curso 2015-2016 **Cálculo II** Grado M+I

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Examen final junio-Primer Parcial - 6 de Junio 2016

Teoría. *(2 puntos)* Nota: /2

1. Prueba el siguiente resultado:

   Sea $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, tal que $f(x,y)$ es diferenciable en $(a,b) \in D$, entonces $f(x,y)$ es continua en (a,b).

2. Es cierto el recíproco ? Por qué?

Cuestiones. *(2 puntos)*
Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta.

Nota: /2

1. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto cuya frontera es un punto, entonces A es cerrado.

   [x] Si [ ] No

   Puesto que $Fr(A) \subset A$ se tiene que A es cerrado.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n^2} \leq (x-3)^2 + y^2 \leq (1+\frac{1}{n})^2\}$, entonces el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto cerrado.

   [ ] Si [x] No

   El conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{(x,y) \mid 0 < (x-3)^2 + y^2 \leq 2\}$ que no es cerrado puesto que $(0,0)$ es un punto frontera que no pertenece al conjunto.

3. Sea $f(x,y)$ una función en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 1} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

   entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

   [ ] Si [x] No

   La igualdad de los límites iterados no implica la existencia de límite doble, aunque si existiese el límite doble tendría que ser 1.

4. Dada la función $f(x,y,z) = x^3 z + xy + e^{x+2y+3z}$ entonces el vector ortogonal a la superficie de nivel 1 de f en el punto $(0,0,0)$ es $(1,2,3)$.

   [x] Si [ ] No

   El vector normal a la superficie es $\nabla f(0,0,0) = (1,2,3)$.

APELLIDOS: NOMBRE:	Nota:

Problemas. *(6.5 puntos)*

1. *(1 punto)* Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$.

Nota: /1

i) Representa A y calcula $\overset{\circ}{A}, Fr(A), Is(A), \overline{A}, A'$.

ii) Indica si es abierto, si es cerrado, si es compacto y si es acotado.

$$\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

$$\begin{aligned} Fr(A) = \{(1,y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \\ \cup \{(x,1) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 = y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

$Is(A) = \emptyset$

$A' = [0,1] \times [0,1]$

$\overline{A} = [0,1] \times [0,1]$

abierto	cerrado	acotado	compacto
NO	NO	SI	NO

2. *(1 punto)* Estudia la existencia de los siguientes límites:

Nota: /1

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 + 10(x-1)y + y^2}{(x+1)^2 + y^2} =$

Pasando a coordenadas polares en $(1,0)$ se tiene que $x - 1 = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 + 10(x-1)y + y^2}{(x-1)^2 + (\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos(\theta))^2 + 10(\rho\cos(\theta))(\rho\,\mathrm{sen}(\theta)) + (\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2}{(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2} = 1 + 10\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

que depende de θ, por tanto el límite NO EXISTE.

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^3}{y} =$

Puesto que podemos tomar dos límites según subconjuntos de modo que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)\ x=0} \frac{5x^3}{y} = 0 \neq 5 = \lim_{(x,y)\to 0\ y=x^3} \frac{5x^3}{y}$$

entonces el límite doble NO EXISTE.

3. *(2 puntos)* Sea $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + x^2y + bxy^2 + ay^3 - 2x^3 - 2xy^2 - ax^2y - ay^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Se pide:

Nota: /2

i) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

La función es un cociente de polinomios en dos variables, los únicos puntos donde puede no ser continua, es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir $x^2 + y^2 = 0$, es decir $(x,y) = (0.0)$. Analicemos lo que ocurre en dicho punto, veamos si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Pasamos a polares $x = \rho\cos(\theta)$, y $y = \rho\,\text{sen}(\theta)$, tendremos que $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\,\text{sen}^2(\theta) = \rho^2$,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^2(\theta) + \rho^3\cos^2(\theta) + b\rho^3\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta) + a\rho^3\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)}{\rho^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\ \left[2\cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) + b\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta) + a\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)\right] = 0 = f(0,0),$$

puesto que $\lim_{\rho\to 0}\rho = 0$ y $2\cos^2(\theta)+\cos^2(\theta)+b\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)+a\cos(\theta)\,\text{sen}^2(\theta)$ es acotado en $[0, 2\pi]$. Luego la función es continua en $(0,0)$ y por tanto continua en todo $\mathbb{R}^2$.

ii) Calcula $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, si es que existen. Calculemos las derivadas parciales en $(0,0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2x^3+0+0+0}{x^2+0} - 0}{x-0} = 2. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{\dfrac{0+0+0+ay^3}{0+y^2} - 0}{y-0} = a. \end{aligned}$$

ii) Determina a y b de modo que f sea diferenciable en el origen.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{2x^3 + x^2y + bxy^2 + ay^3}{x^2+y^2} - [2x + ay]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 + x^2y + bxy^2 + ay^3 - 2x^3 - 2xy^2 - ax^2y - ay^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + bxy^2 - 2xy^2 - ax^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y(1-a) + xy^2(b-2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

La condición necesaria y suficiente para que este último límite sea nulo (y por tanto sea diferenciable) es que

$$a = 1, \quad b = 2.$$

iv) Suponiendo que damos a a y b los valores que hacen a f diferenciable en $(0,0)$, calcula el plano tangente en el origen. El plano tangente en el origen es

$$z = 2x + y$$

4. (*2 puntos*) Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Nota:	/2

i) Calcula mecánicamente la derivadas parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y calcula el dominio de esta función.

Derivando mecánicamente obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{(xy)^{2/3}},$$

y el dominio de esta función es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$.

ii) Estudia si esta función es diferenciable en $(0,0)$.

En primer lugar calculamos las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0. \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0.
\end{aligned}$$

Y comprobamos si el siguiente límite es nulo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pasando a coordenadas polares en el origen, $x = \rho\cos(\theta)$, y $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, tendremos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{2/3}}{\rho} = \infty$$

Puesto que este límite no es nulo la función f no es diferenciable en el origen.

iii) Calcula las direcciones (u,v) para las que existe la derivada direcional de f en $(0,0)$.

Para calcular la derivada direccional de f en $(0,0)$ según (u,v) hacemos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(u,v)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{tutv}}{t} = \lim_{t\to 0} t^{-1/3}\sqrt[3]{uv}$$

que no existe salvo que $uv = 0$. En el caso de que $uv = 0$ las direcciones $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$ y la derivada direccional es 0.

iv) Calcula la dirección en la que la derivada direccional de f en $(2,4)$ es máxima y el valor de dicha derivada direccional. En qué dirección es nula?

Puesto que f es diferenciable en $(2,4)$, la dirección en la que la derivada direccional de f en dicho punto es máxima en la dirección del gradiente de f en $(2,4)$. Puesto que $\nabla f(2,4) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, la dirección es:

$$(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}),$$

siendo el valor de la derivada direccional $\|\nabla f(2,4)\| = \frac{\sqrt{5}}{3}$.